ДЗС 29.11.12

Ако $\alpha_n \to +\infty$ $\alpha_n \in Q$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \to e^p$$

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$$

Щом $x_n \to x$ то $\exists M \in R$ т.че $|x_n| \le M$ за $\forall n \in N \Rightarrow |x| \le M$

за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N$ т.че за $\forall n > n_0$ имаме $|x_n - x| < \varepsilon$

$$|x_n^k - x^k| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{M^1 M^{k-1-1}}{k!} = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{M^{k-1}}{k!} =$$

$$\frac{\varepsilon}{k} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$$

$$\left(\frac{n^2-n-3}{n^2+3n+2}\right)^n = \left(\frac{n^2-n-3+4n-4n+5-5}{n^2+3n+2}\right)^n =$$

$$\left[\frac{(n^2+3n+2)-4n-5}{n^2+3n+2}\right]^n = \left(1+\frac{-4n-5}{n^2+3n+2}\frac{1}{y}\right)^n \Rightarrow$$

$$e^{e_n \frac{-4n^2-5n}{n^2+3n+2}} = e^{-4} \quad ?$$

Да се изследва за сходимост

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ Даламбер

Нека $u_n = \frac{n^3}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \Big| \cdot \frac{2^n}{n^3} =$

$\lim \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сходящ ред по Даламбер

Критерии на Коши

Ако от някое място нататък е изпълнено $\sqrt[k]{u_k} \leq q < 1$ то $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ е сходящ $u_k \geq 0$ за $\forall k \in \mathbb{N}$

Ако $\lim \sqrt[k]{u_k} = q < 1$ то $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ е сходящ

при $q > 1$ редът е разходящ

при $q = 1$ редът не дава резултат

$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сходящ

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{3^k} \Rightarrow$ нека $u_k = \frac{3+(-1)^k}{3^k} \Rightarrow$ по Коши

$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{3+(-1)^k}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < 1 \rightarrow$ редът е сходящ

(от $\sqrt[k]{a} \to 1$ при $a > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)3}}{n\sqrt{2}^n}$$

Критерии на Лайбниц за редове от вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k \qquad u_k \geq 0$$

Ако $u_k \to 0$ и $u_{k+1} \leq u_k$ то

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$ е сходящ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n$$

$\sqrt[n]{n!} \to \infty$!!!

разглеждаме реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+i)^n$

$$u_k = \frac{n}{3^n}(1+i)^n$$

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{(1+i)^{n+1} \cdot 3^n}{n(1+i)^n}\right| = \underbrace{\frac{n+1}{3^n}}_{\to 0} |1+i| \to 0$$

$\Rightarrow$ сходящ от $0 < 1$

и u_k абсолютно сходящ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3\sqrt{n+1}(3^n+2)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

По Даламбер

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \frac{x^{k+1}}{3\sqrt{k+2}(3^{k+1}+2)} \cdot \frac{3\sqrt{k+1}(3^k+2)}{x^k} =$$

$$|x| \frac{\sqrt[3]{k+1}\,(3^k+2)}{\sqrt[3]{k+2}\,(3^{k+1}+2)} \longrightarrow \frac{|x|}{3}$$

что $\frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow$ сходится $\quad x \in (-3, 3)$

что $\frac{|x|}{3} > 1 \Rightarrow$ расходится $\quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$